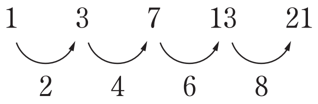
PART4 階差数列と一般項

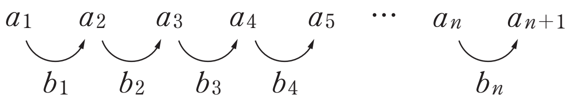
要点① 階差数列

数列1，3，7，13，21，……において，隣り合う2項の差をとって並べると，数列2，4，6，8，……が得られる。この数列は，初項2，公差2の等差数列である。



数列 $\{a_n\}$ において，隣り合う2項の差

$$a_{n+1}-a_n=b_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$



を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の「　　　　」という。

上の例において，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$$

である。したがって

$$b_5=\quad \text{より}\quad a_6=\quad+\quad=21+10=31$$

である。このように，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより

$$a_{n+1}=a_n+b_n$$

であることを用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の項を順に求めることができる。

要点② 階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_{n+1}-a_n=b_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=a_n+b_n$$

であることから

$$a_2=a_1+b_1$$

$$a_3=a_2+b_2=a_1+(b_1+b_2)$$

$$a_4=a_3+b_3=a_1+(b_1+b_2+b_3)$$

$$\vdots$$

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1})$$

が成り立つ。$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}=$　　　　であることから，以下のことが成り立つ。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例 数列 1，3，7，13，21，……の一般項を求める。

この数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，6，8，……

であり，その一般項は $b_n = 2n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \quad + $$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 1 + 2 \cdot$$

$$= 1 + (n-1)n$$

$$= n^2 - n + 1 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

①で $n = 1$ のとき $1^2 - 1 + 1 = 1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，①は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n = n^2 - n + 1$

4 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1, 2, 7, 16, 29, ……

(2) 3, 4, 7, 16, 43, ……

Point Pickup

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　……　①

階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，初項から第 $n-1$ 項までの和を求めることにより，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

①の結果に $n=1$ を代入し，a_1 と一致するかの確認が必要。

第3講 PART4 確認問題

1 数列 $\{a_n\}$ が

$$1,\ 6,\ 13,\ 22,\ 33,\ \cdots\cdots$$

であるとする。

この数列の階差数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$b_n = \boxed{\text{ア}}\,n + \boxed{\text{イ}}$$

である。

したがって, $a_n = n^2 + \boxed{\text{ウ}}\,n - \boxed{\text{エ}}$ である。

2 数列 $\{a_n\}$ が

$$2,\ 5,\ 11,\ 23,\ 47,\ \cdots\cdots$$

であるとき,

$$a_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{\,n-1} - \boxed{\text{キ}}$$

である。

PART4 階差数列と一般項

4 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1, 2, 7, 16, 29, ……　　(2) 3, 4, 7, 16, 43, ……

[解答]

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1, 5, 9, 13, ……

これは，初項1，公差4の等差数列より，$b_n=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)=2n^2-5n+4$$

この式において，$n=1$ のとき $2\cdot 1^2-5\cdot 1+4=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=2n^2-5n+4$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1, 3, 9, 27, ……

これは，初項1，公比3の等比数列より，$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$=3+\frac{1\cdot\left(3^{n-1}-1\right)}{3-1}=3+\frac{1}{2}\left(3^{n-1}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{5}{2}$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 3^0+\frac{5}{2}=3$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{5}{2}$

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3，ウ：2，エ：2

[解説]

$\{a_n\}$：1　6　13　22　33　……

$\{b_n\}$：　5　7　9　11　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 5，公差 2 の等差数列であるから，

$$b_n = 5+(n-1)\cdot 2 \quad \text{[A]}$$
$$= \mathbf{2n+3}$$

[A]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は，
$$a_n = a+(n-1)d$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \text{[B]}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3)$$
$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 3(n-1)$$
$$= n^2+2n-2$$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

この式において，$n=1$ のとき，

$1^2+2\cdot 1-2=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n = n^2+2n-2}$$

2 [正解] オ：3，カ：2，キ：1

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$\{a_n\}$：2　5　11　23　47　……

$\{b_n\}$：　3　6　12　24　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$ [C]

[C]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，
$a_n = ar^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$$ [D]

[D]　$\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 $(n-1)$ 項までの和である。

$$= 2 + \frac{3\left(2^{n-1} - 1\right)}{2 - 1}$$

$$= 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

この式において，$n = 1$ のとき，

$3 \cdot 2^{1-1} - 1 = 2$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1}$$